

# la frazione come avvio al pensiero proporzionale



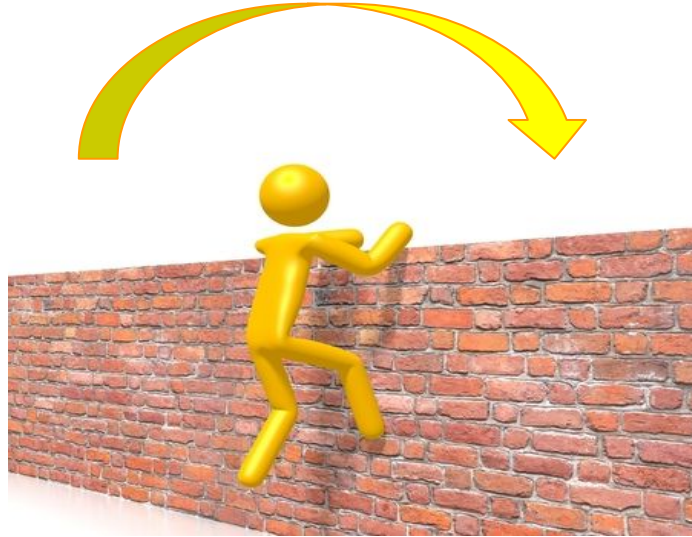
Antonella Castellini

[antocastellini@gmail.com](mailto:antocastellini@gmail.com)

29 aprile 2024

# Perché il pensiero proporzionale è “difficile”?

additivo



moltiplicativo

**Quando** si costruisce  
(o si può cominciare a costruire)  
il pensiero proporzionale?

**E come?**

*La proporzionalità nell'allievo è percepita in modo intuitivo molto tempo prima del suo studio in classe (generalmente nella seconda classe di scuola secondaria di primo grado) ed è in rapporto stretto con la sua progressione nel campo concettuale della moltiplicazione.*

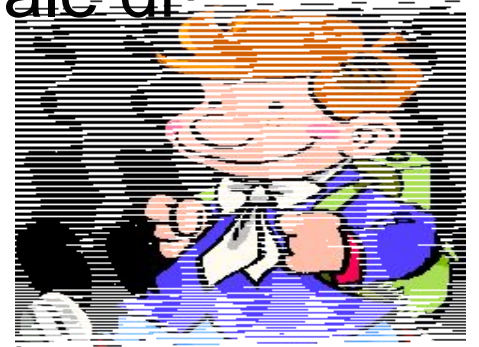
F. Jaquet

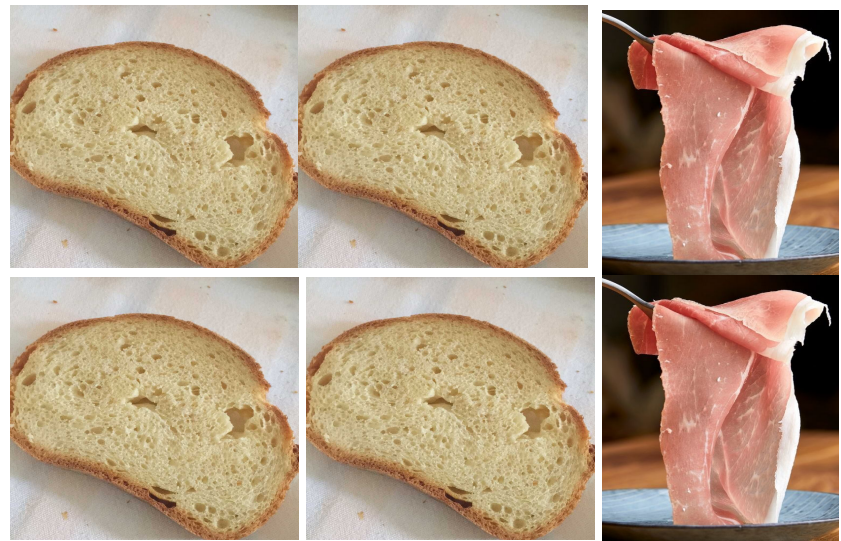


Le sue idee 'spontanee' circa le **relazioni** proporzionali rimangono nel terreno extra scolastico

F. Jaquet

A scuola si lavora sul campo concettuale di **strutture additive** .





D11. La mamma di Luca per fare 2 panini ha usato:

- 4 fette di pane;
- 2 fette di prosciutto cotto;
- 1 mozzarella.

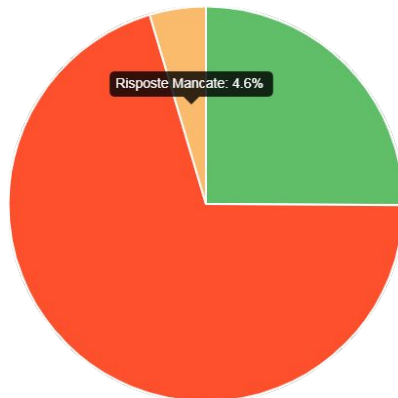
Per fare 4 panini ha bisogno di:

- ..... fette di pane;
- ..... fette di prosciutto cotto;
- ..... mozzarelle.

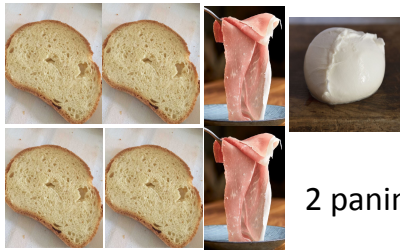
2 panini

**per fare 4 panini**

- quante fette di pane?
- quante di prosciutto?
- quante mozzarelle?



*prova INVALSI 2011  
grado 2*



2 panini

## per fare 4 panini

- quante fette di pane?
- quante di prosciutto?
- quante mozzarelle?

prova INVALSI 2011  
grado 2

modello additivo	modello moltiplicativo
mi servono altre 4 fette di pane quindi aggiungo 4 a tutto	raddoppio i panini devo raddoppiare gli ingredienti
$4+4= 8$ fette pane $2+4= 6$ fette di prosciutto $1+4= 5$ mozzarelle	$4 \times 2= 8$ fette pane $2 \times 2= 4$ fette prosciutto $1 \times 2= 2$ mozzarelle
differenza costante 4	relazione costante 2

D11. Per preparare 4 tovagliette all'uncinetto la nonna utilizza 6 gomitoli di cotone.

- a. Quanti gomitoli dello stesso tipo dovrà utilizzare per preparare 20 tovagliette?

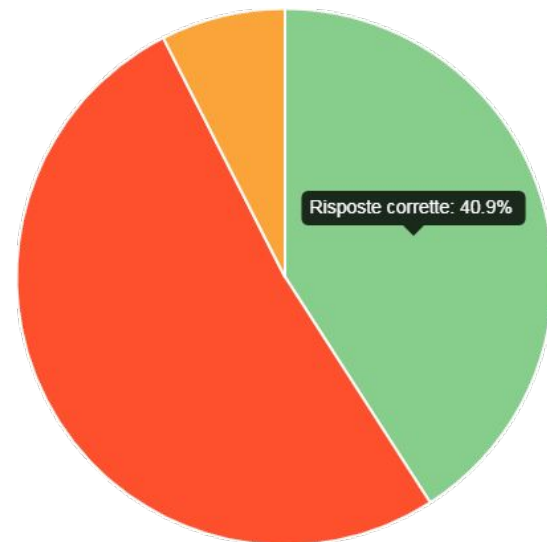
Risposta: .....

- b. Scrivi come hai fatto per trovare la risposta.

.....

modello additivo	modello moltiplicativo
$6-4=2 \rightarrow 20+2=22$ oppure $20-4=16 \rightarrow 6+16=22$	$20:4=5 \rightarrow 6 \times 5=30$ per una tovaglietta serve 1 gomitolo e mezzo quindi $1,5 \times 20=30$ <b>passaggio alla relazione unitaria</b>

Prova INVALSI 2013  
grado 5



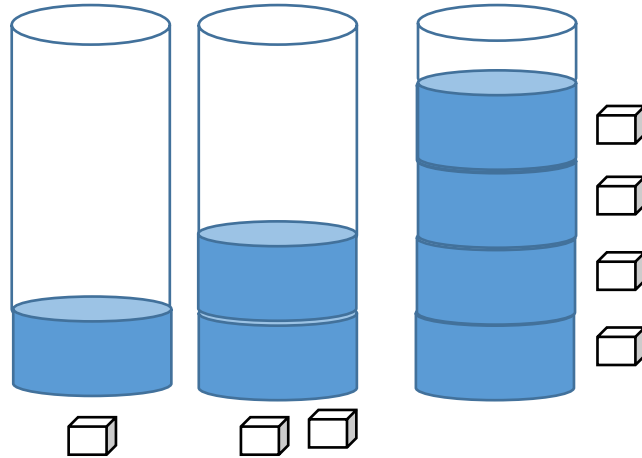




pensiero  
proporzionale

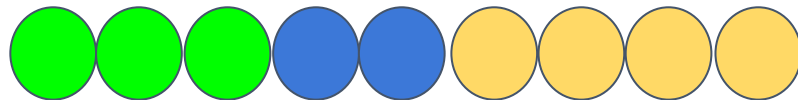
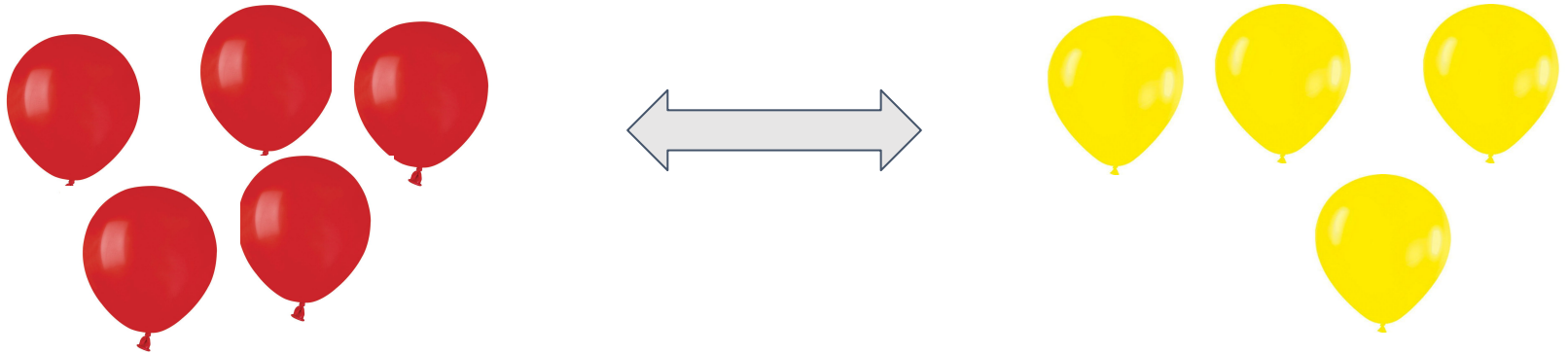
**relazione**

**ogni ..... ho**



**ogni tacca ho 1 zucherino  
sono ugualmente dolci?**

# ogni .....



**ogni piattino ho 2 pasticcini  
ogni 2 pasticcini ho un piattino**



*relazione* 1 piattino  $\longleftrightarrow$  2 pasticcini



**1 rispetto a 2**



**1 a 2**

**2 a 1**



**2 rispetto a 1**



**e la frazione ?**

cioccolatini di Marta

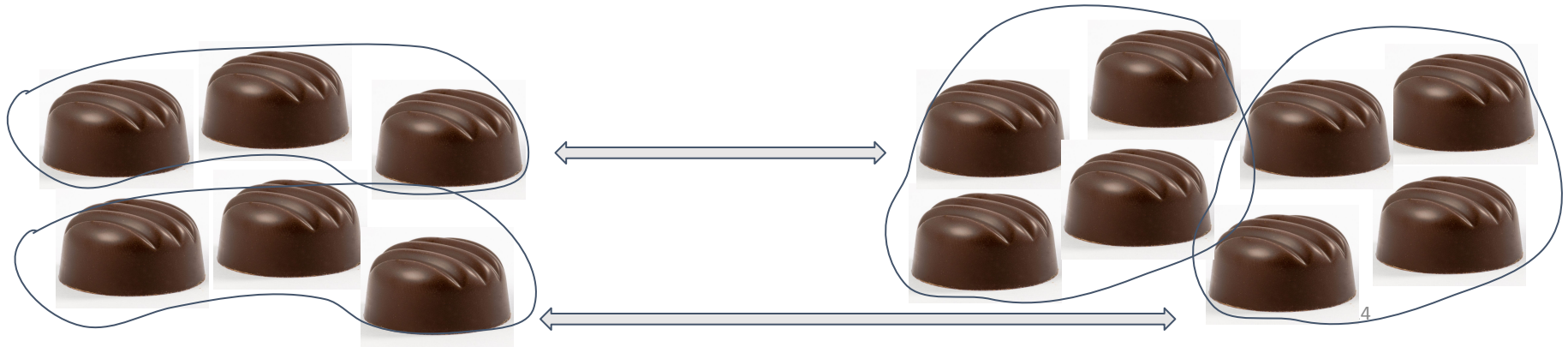


cioccolatini di Lucia



**ogni 3 di Marta  
ho 4 per Lucia**

**i cioccolatini di Marta sono  $\frac{3}{4}$  dei cioccolatini di Lucia  
i cioccolatini di Lucia sono  $\frac{4}{3}$  dei cioccolatini di Marta**



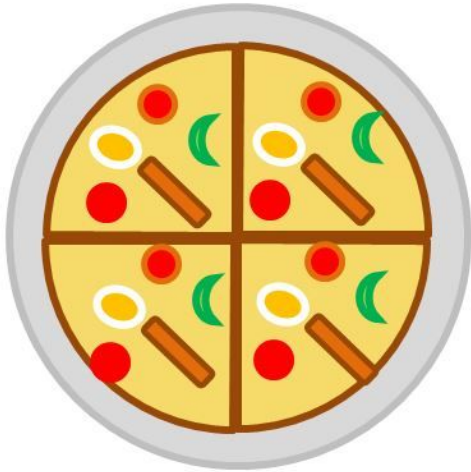
# la frazione

sotto forma di  
parte-tutto

E il pensiero  
proporzionale  
sparisce



# 3/4 di pizza



- dividi l'intero in 4 parti uguali
- prendine 3
- resta una parte si chiama frazione complementare



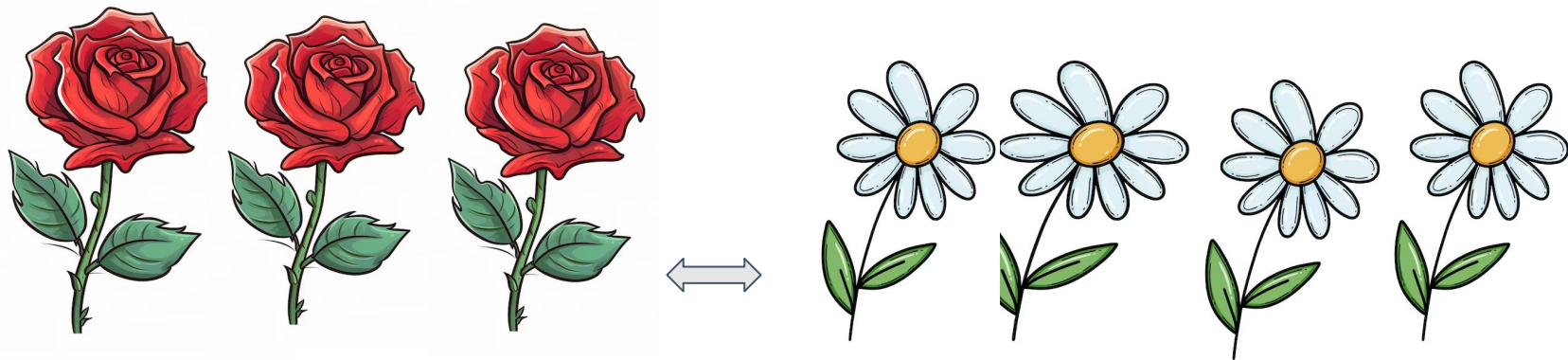


*Anna ha 80 anni e Marco suo figlio ha  $\frac{3}{4}$  della sua età*

$$80:4 \times 3 = 60$$

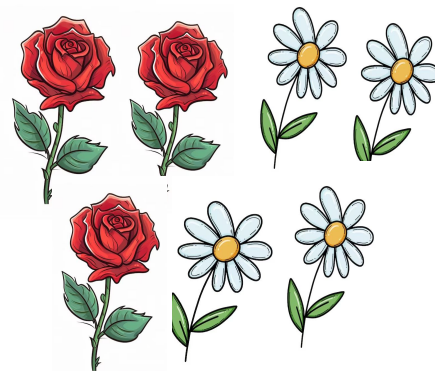
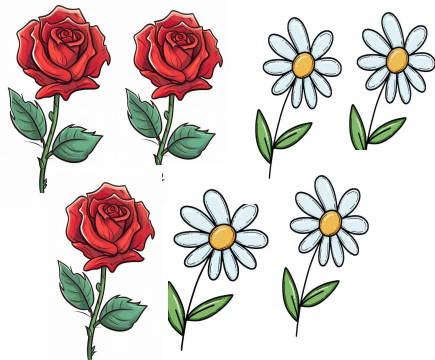
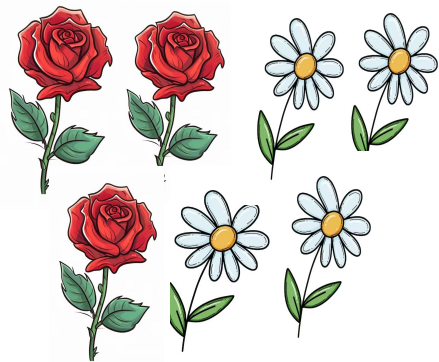


*ad Anna restano 20 anni*



**relazione:** ogni 3 rose ho 4 margherite  
3 rose rispetto a 4 margherite

le rose sono  $\frac{3}{4}$  delle margherite  
le margherite sono  $\frac{4}{3}$  delle rose



ogni 3 rose ho 4 margherite  
3 rose **rispetto** a 4 margherite

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$$

rose	margherite
3	4
6	8
9	12

# facile! ovvio! sono frazioni equivalenti!



*due o più frazioni si dicono equivalenti se rappresentano la stessa quantità di uno stesso intero*

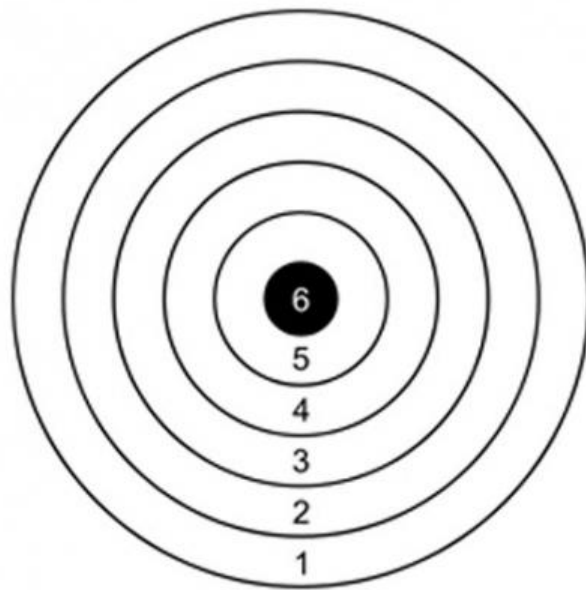
*Data una frazione, per poter ottenere altre frazioni a lei equivalenti, occorre moltiplicare o dividere per uno stesso numero il numeratore e il denominatore della frazione data*



# eppure

Marco ha fatto centro  
5 volte su 10 tiri

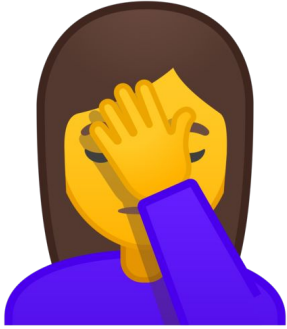
Bernardo ha fatto centro  
11 volte su 16 tiri



chi è il più bravo?

$$\frac{5}{10}$$

$$\frac{11}{16}$$



*sono bravi uguale perché la  
differenza è la stessa*

$$\begin{array}{r} \underline{5} \\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{11} \\ 16 \end{array}$$

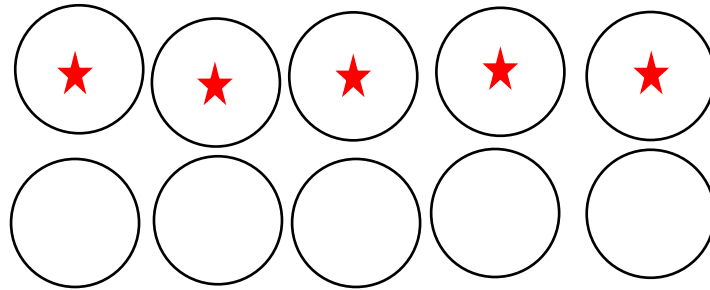


*da 5 a 10  
c'è 5 come  
da 11 a 16*

Ogni 2 tiri  
1 centro

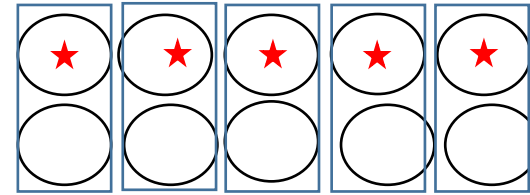
Marco

5 volte su 10 tiri



Come dire la **metà** dei tiri sono centrati

# Confrontiamo con Bernardo **11 volte su 16 tiri**

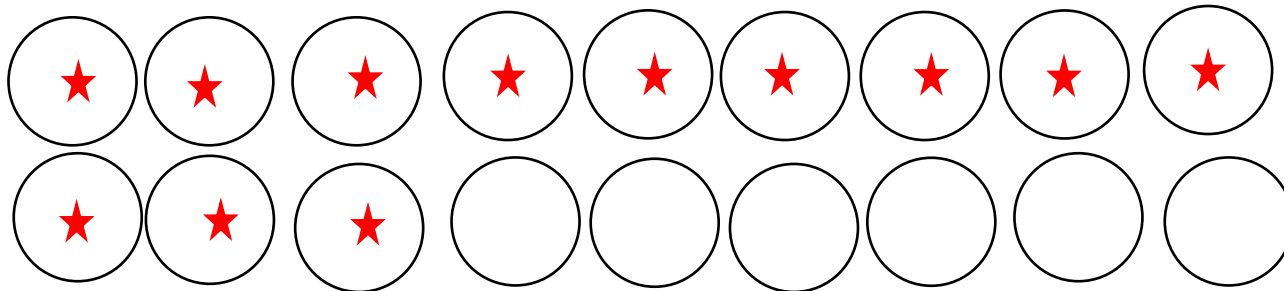


Ogni 2 tiri 1 centro

**Non vale più**

**Ogni 2 tiri**

**1 centro**





Marco 5 su 10

è come dire **ogni 2, 1 centro**

Bernardo se ogni 2 tiri avesse fatto 1  
centro avrebbe avuto **8/16 non 11**

**5/10  $\neq$  11/16** eppure ...

*da 5 a 10 c'è  
come da 11 a 16!  
la differenza è  
sempre 5*

**VERTICALITA'**



**proporzionalità  
come relazione**



**proporzionalità come  
uguaglianza di  
rapporti**

- Contare oggetti o eventi, a voce e mentalmente, in senso progressivo e regressivo e per salti di due, tre
- Leggere e rappresentare relazioni e dati con diagrammi, schemi e tabelle.

- Operare con le frazioni e riconoscere frazioni equivalenti
- Riconoscere e descrivere regolarità in una sequenza di numeri o di figure.
- Utilizzare numeri decimali, frazioni e percentuali per descrivere situazioni quotidiane.

- Esprimere la relazione di proporzionalità con un'uguaglianza di frazioni e viceversa.
- Usare il piano cartesiano per rappresentare relazioni e funzioni empiriche o ricavate da tabelle, e per conoscere in particolare le funzioni del tipo  $y = ax$ ,  $y = a/x$ ,  $y = ax^2$ ,  $y = 2n$  e i loro grafici e collegare le prime due al concetto di proporzionalità.



un buon problema

## la balena Olga



La balena Olga si chiede:

«Quanti uomini occorreranno per fare il mio peso?».

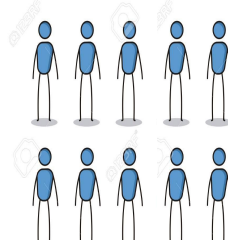
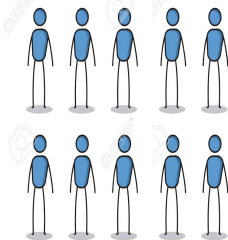
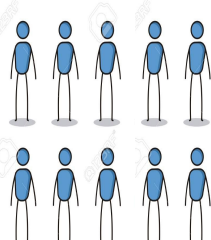
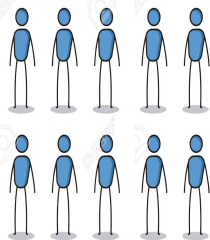
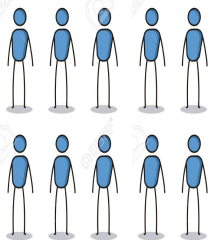
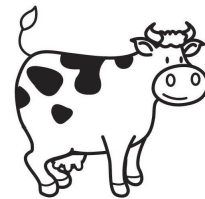
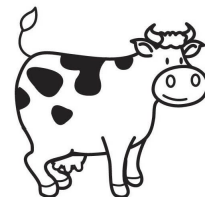
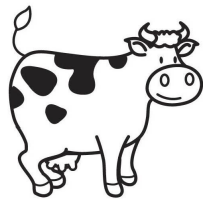
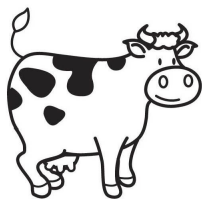
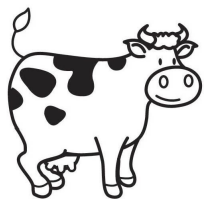
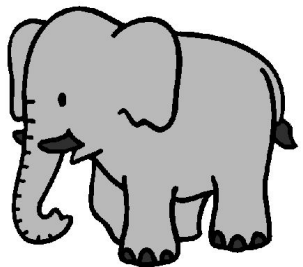
Voi potete aiutarla seguendo queste indicazioni:

- 5 mucche fanno il peso di un elefante;
- 10 uomini fanno il peso di una mucca;
- 30 elefanti fanno il peso di una balena.

**Quanti uomini sono necessari per fare il peso di Olga?**

**Spiegate come avete fatto a trovare la risposta.**





**ogni 10 uomini ho 1 Mucca**

20 U → 2M

30 U → 3 M

....

50 U → 5M

**ogni 1 elefante ho 5 mucche quindi**

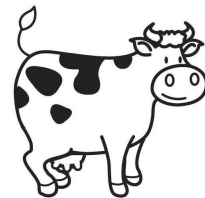
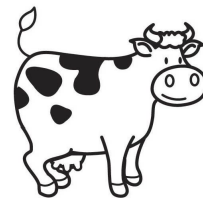
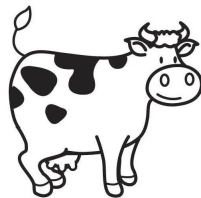
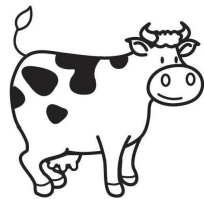
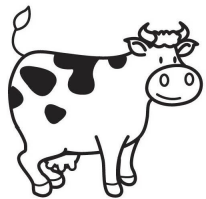
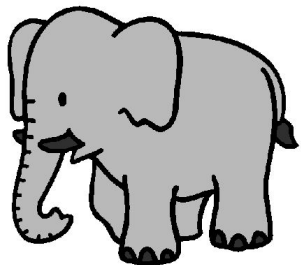
**ogni elefante ho 50 uomini**

1 E → 5 M → 50 uomini

2E → 10 M → 100 uomini

.....

30 E → 150 M → 1500 Uomini



elefanti	mucche
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
n	n x 5

**chi varia? chi resta costante?**

$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{10}$$

$$\frac{3}{15}$$

.....

$$\frac{n}{n \times 5}$$

**1 rispetto a 5  
è come dire 2 rispetto a 10**

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$$

**FRAZIONI EQUIVALENTI**



$$1:5=2:10$$

**1 sta a 5 come 2 sta a 10**

**PROPORZIONE**

D27. Nella scuola “Nino Bixio” ci sono 600 studenti e un insegnante ogni 15 studenti.

a. Quale proporzione permette di trovare il numero  $x$  degli insegnanti?

A.   $x : 15 = 1 : 600$

B.   $15 : 1 = x : 600$

C.   $1 : 15 = x : 600$

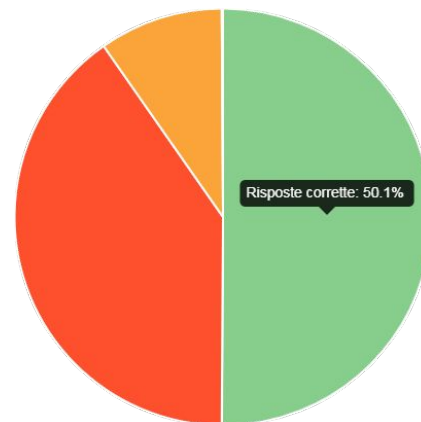
D.   $x : 1 = 15 : 600$

b. Nella scuola “Giuseppe Garibaldi”, con lo stesso numero di studenti della “Nino Bixio”, il numero degli insegnanti è la metà. Quanti studenti ci sono per ogni insegnante?

Risposta: .....

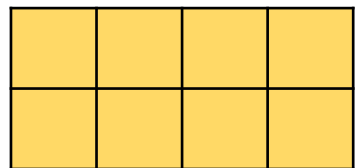
Utilizza e interpreta il linguaggio  
matematico e ne coglie il rapporto con il  
linguaggio naturale.

INVALSI 2013  
grado 8

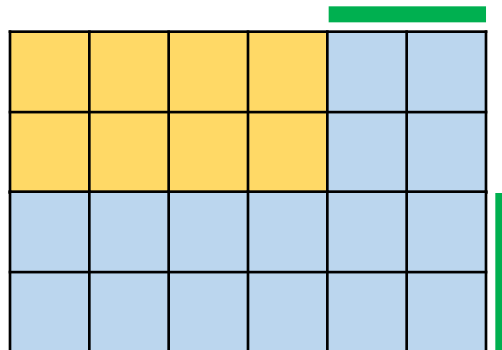




# uno sguardo geometrico

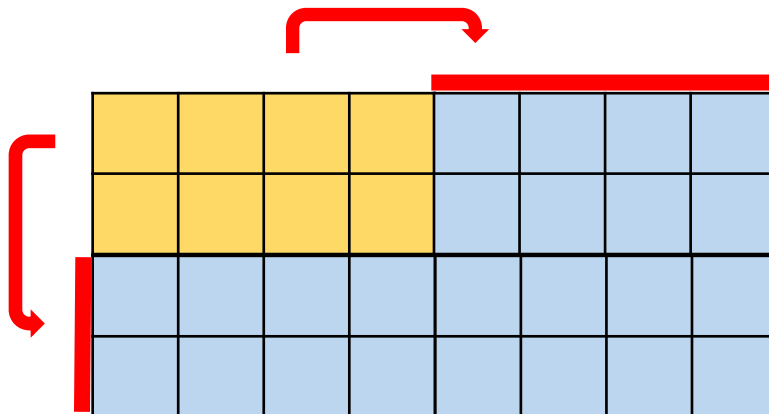


additivo

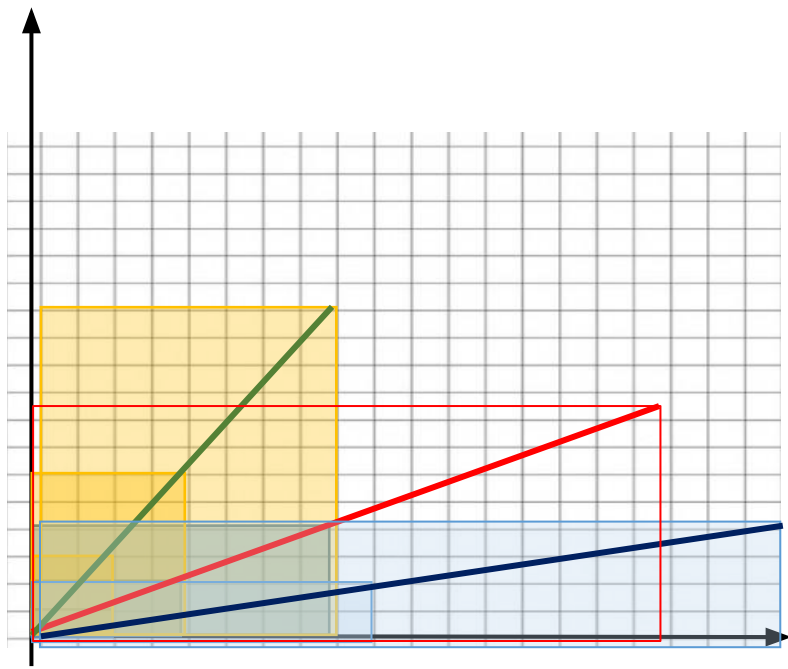
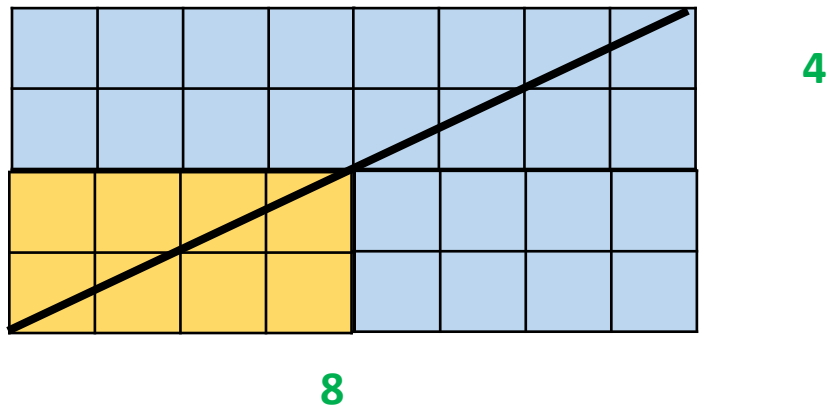
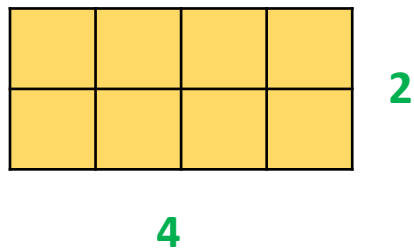


+ 2

moltiplicativo



x 2



## Frazioni equivalenti

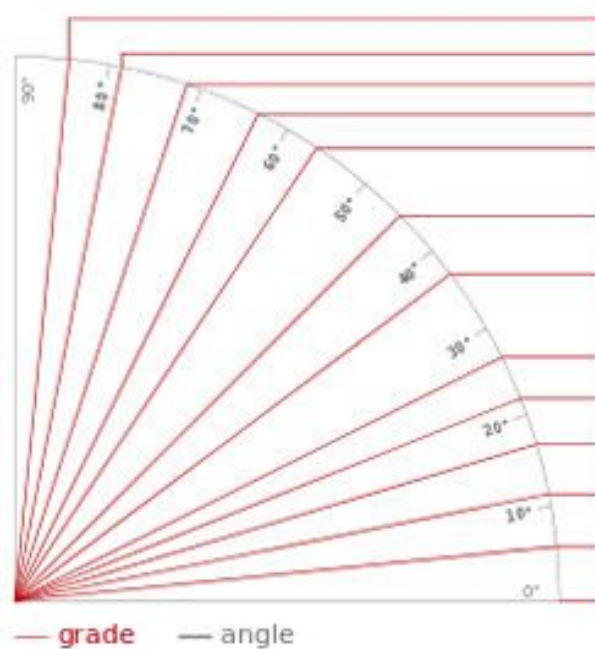
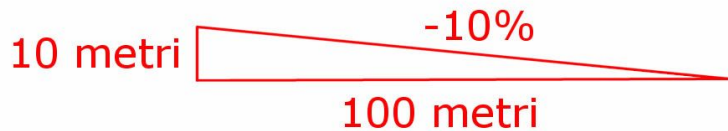
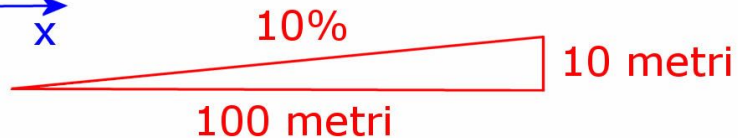
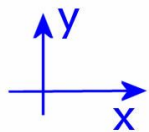
In ogni retta ci stanno tutte le frazioni equivalenti ad una data come dire che ci sta un vertice di tutti i rettangoli simili fra loro



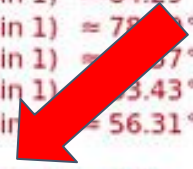
Pendenza di una retta



$$\text{pendenza} = \frac{\text{dislivello}}{\text{spostamento}}$$

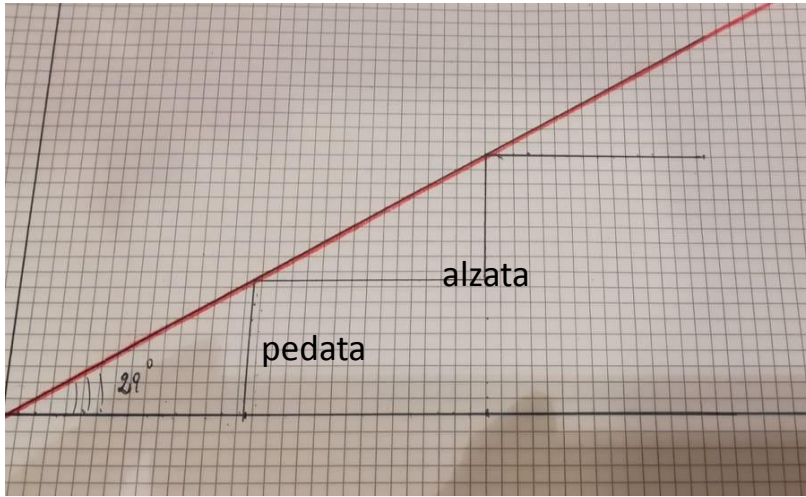


1000%	(10 in 1)	= 84.29°
500%	(5 in 1)	= 78.69°
300%	(3 in 1)	= 71.57°
200%	(2 in 1)	= 63.43°
150%	(3 in 4)	= 56.31°
<b>100%</b>	<b>(1 in 1)</b>	<b>= 45°</b>
75%	(3 in 4)	= 36.87°
50%	(1 in 2)	= 26.57°
40%	(2 in 5)	= 21.80°
30%	(3 in 10)	= 16.70°
20%	(1 in 5)	= 11.31°
10%	(1 in 10)	= 5.71°
0%		= 0°



# Le scale: la fatica?

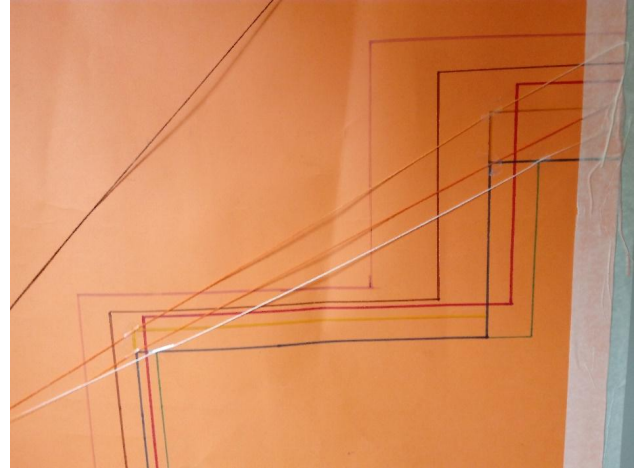
## Questione di rapporti



**Alzata / pedata = l'inclinazione della retta rispetto all'asse x  
coefficiente angolare ovvero pendenza della scala**

$$Y = mx \text{ da cui } m = y/x$$

Nel nostro caso  $17 : 31 = 0,548..$  approssimato = 0,55  
tangente dell'angolo di  $29^\circ$



## LEGENDA

Verde:  $47\% = \frac{15}{32} = \frac{Y}{X}$   
 Blu:  $50\% = \frac{15}{30} = \frac{Y}{X}$   
 Giallo:  $56\% = \frac{17}{30} = \frac{Y}{X}$   
 Nero:  $100\% = \frac{17}{17} = \frac{Y}{X} = 1$

↓  
 $Y = X$

**la matematica non si  
insegna, si apprende  
e si apprende  
nell'attività**

*Grazie!*

G.Papy